Лекция 11
Тема. Некоторые приложения определенного интеграла.

План лекции:
1) *Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.*
2) *Геометрические приложения определенного интеграла.*
3) *Физические (механические) приложения определенного интеграла.*

§1. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочно гладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочно непрерывную функцию Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R(x),$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt \qquad (0! = 1).$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

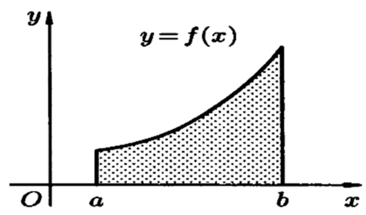
$$R(x) = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} - \frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}(x-a)^{r-2} +$$

$$+ \frac{1}{(r-3)!}\int_a^x (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\,dt = \ldots \; \ldots = -\sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f(x).$$

§2. Геометрические приложения определенного интеграла.

§2.1. Вычисление площади криволинейной трапеции.



Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу — отрезком $[a; b]$ оси Ox вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c; d]$ оси Oy. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$

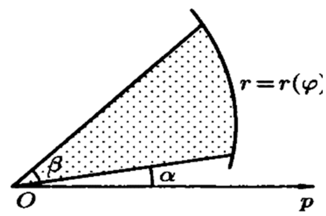
Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \geqslant 0$, $t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t)\, dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$$



§2.2. Вычисление длины дуги кривой.

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки A и B с координатами: $A(a; c)$, $B(b; d)$. Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx; \qquad l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\, dy.$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

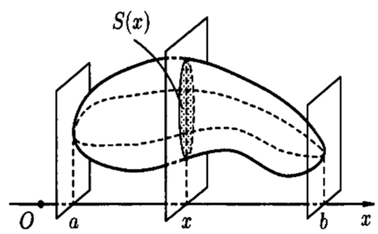
Если кривая задана уравнением в *полярных координатах* $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

§2.3. Вычисление объема тела вращения.

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Пусть в пространстве задано тело. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки $x \in [a; b]$ ***на ней. Площадь фигуры, образующейся в сечении***, зависит от точки x, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a; b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, находящейся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$



Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx\,, \qquad V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx\,, \quad a \geqslant 0.$$

Заметим, что если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geqslant 0$) и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy\,.$$

§2.4. Вычисление площади поверхности тела вращения.

Если дуга АВ кривой $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ вращается вокруг оси Ox, то площадь описанной ею поверхности выражается формулой

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

§3. Физические (механические) приложения определенного интеграла.

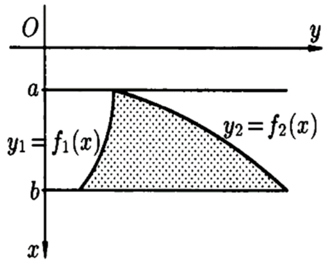
а) *Путь, пройденный телом*, перемещающимся со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени $[t_1; t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,.$$

б) *Работа переменной силы*, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a; b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)\,dx\,.$$

в) *Давление жидкости* на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости («закон Паскаля»), т. е. $P = g\gamma S h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.



Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$

$$P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))x\,dx\,.$$

г) *Статические моменты, относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести* плоской дуги $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, находятся соответственно по формулам

$$S_x = \int_a^b \gamma y\,dl\,, \quad S_y = \int_a^b \gamma x\,dl\,,$$

$$M_x = \int_a^b \gamma y^2\,dl\,, \quad M_y = \int_a^b \gamma x^2\,dl\,,$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$ $\left(\sqrt{(x'_y)^2 + (y'_x)^2}\, dt,\ \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\, d\varphi\right)$ — дифференциал дуги;

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}, \quad m = \int_a^b \gamma \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$$

(здесь x_c, y_c — координаты центра тяжести, а m — масса кривой).